ACHTUNG: STATISTIK

Das St.-Petersburg-Paradoxon II

VON BJÖRN & SÖREN CHRISTENSEN

Vergangene Woche hatten wir an dieser Stelle erörtert, dass Sie sich gut überlegen sollten, mit folgendem Spiel ins Glücksspielgeschäft einzusteigen: Ihr „Kunde“ wirft eine Münze so lange, bis Kopf erscheint. Wenn Kopf bereits im ersten Wurf oben liegt, erhält der Spieler zwei Euro. Erscheint Kopf erst bei späteren Würfen, werden die zwei Euro mit jedem zusätzlichen Wurf verdoppelt. Das erstaunliche an diesem Spiel ist, dass der zu erwartende Betrag, den der Münz-werfende Spieler erhält, unendlich groß ist. Dies liegt daran, dass die Wahrscheinlichkeit, bei einem bestimmten Wurf das erste Mal Kopf oben liegen zu haben, bewertet mit dem dann fälligen Auszahlungsbetrag genau 1 ist, also für alle Varianten $^1/_2 \times 2 + {}^1/_4 \times 4 + {}^1/_8 \times 8 + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$. Im Mittel verlieren Sie also, egal wie hoch Sie den Einsatz festlegen!

Dass Sie nicht unendlich große Beträge auszahlen können, ist klar. Aber stellen wir uns vor, Sie hätten gerade gut eine Million Euro geerbt, die Sie maximal auszuzahlen bereit wären. Im Spiel würde also eine obere Grenze eingezogen: Wenn der Auszahlungsbetrag zum Beispiel 1 Million Euro übersteigt, wird das Spiel abgebrochen und der Auszahlungsbetrag muss unabhängig davon geleistet werden, ob im letzten Wurf Kopf oder Zahl oben gelegen hat.

Wie viel sollten Sie dem Spieler für dieses modifizierte Spiel abnehmen? Zur Beantwortung dieser Frage muss erst einmal ermittelt werden, wann die Grenze von einer Million Euro überschritten wird. Dieses tritt beim 20. Wurf ein, der Auszahlungsbetrag ist dann $2^{20} = 1\,048\,576$ Euro. Die Wahrscheinlichkeit, dass erstmals Kopf beim 20. Wurf oben liegt, ist $(^1/_2)^{20}$, analog dafür, dass Zahl oben liegt, ebenfalls $(^1/_2)^{20}$. Für den 20. Wurf ist die Wahrscheinlichkeit also doppelt so hoch wie bei allen vorherigen Runden, bis zum 20. Wurf ändert sich hingegen nichts. Der zu erwartende Auszahlungsbetrag ist also: $^1/_2 \times 2 + {}^1/_4 \times 4 + {}^1/_8 \times 8 + \ldots + 2 \times (^1/_2)^{20} \times 2^{20} = 1 + 1 + 1 + \ldots + 2 = 21$. Wenn Sie dem Spieler also pro Spiel einen Einsatz von 21 Euro – plus einen Aufschlag für Sie – abnehmen, dann machen Sie im Mittel bei diesem Spiel Gewinn.

Das Ergebnis zeigt, dass das Einziehen einer sehr hoch gewählten Obergrenze beim Auszahlungsbetrag – mehr als eine Million Euro – dazu führt, dass die zu erwartenden Auszahlungsbeträge tatsächlich überschaubar werden und sich das Erstaunliche der unendlich großen Auszahlungsbeträge bei einem unbeschränkten Spiel auflöst.

FOTOLIA