

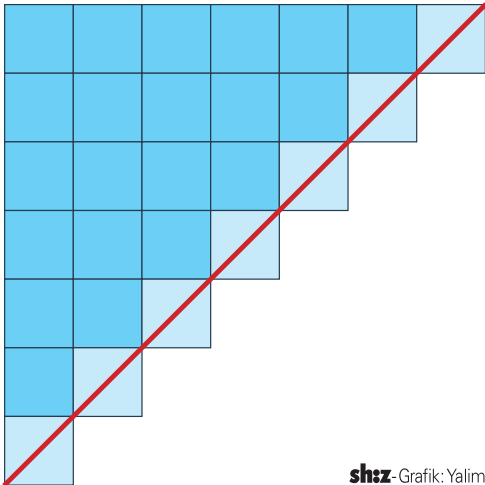


ACHTUNG, MATHE!

Die Gaußsche Summenformel geometrisch

VON BJÖRN UND SÖREN CHRISTENSEN

Im November letzten Jahres hatten wir in einer Kolumne vorgestellt, wie Sie Ihre Freunde bei der Sendung „Schlag den Star“ mit Ihren Mathe-Kenntnissen beeindrucken können, indem Sie die möglichen Punkte, die die Spieler über alle Runden erreichen können, blitzschnell zusammenzählen. Die Grundlage war eine einfache Formel für die Summe der ersten n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen (also $1+2+3+\dots+n$), die der junge Carl Friedrich Gauß mit einem Trick gefunden hat. Die Lösung, die auch als Gaußsche Summenformel bezeichnet wird, lautet $n \cdot (n+1) / 2$. Zum Beispiel ist die Summe der Zahlen von 1 bis 100 also $100 \cdot 101 / 2 = 5050$. In der Mathematik ist es allerdings häufig so, dass es viele Wege gibt, um gleiche Gesetzmäßigkeiten herzuleiten. Und erstaunlicherweise sind oft geometrische Überlegungen hilfreich, um Formeln für Zahlen zu beweisen, so auch hier. Stellen Sie sich vor, die Anzahlen der einzelnen Elemente der Summe, die Sie bilden wollen, werden durch Quadrate dargestellt. Dann wäre die Summe der Zahlen von 1 bis 7 also ein Quadrat plus zwei Quadrate usw. bis sieben Quadrate. Wenn Sie diese wie folgt anordnen, kann man sich leicht erschließen, warum diese Summe durch $7 \cdot 8 / 2 = 28$ dargestellt werden kann.



sh:z-Grafik: Yalim

Es fällt auf, dass es sich um etwas mehr als ein halbes Quadrat mit der Seitenlänge 7 Elemente handelt. Konkret ist es das halbe Quadrat zuzüglich der Hälfte der Diagonalquadrate. Das wäre dann $7^2/2$ für das halbe Quadrat plus $7/2$, denn es gibt genau 7 Diagonalelemente, die zusätzlich zum halben Quadrat gezählt werden müssen. Also $7^2/2 + 7/2 = 49/2 + 7/2 = 56/2 = 28$. Allgemein lässt sich diese grafische Darstellung also als $n^2/2 + n/2$ darstellen. Dieses ist dann $n^2/2 + n/2 = (n^2 + n) / 2 = n \cdot (n+1) / 2$. Und dieses entspricht genau dem Ergebnis, das auch der junge Carl Friedrich Gauß vor über 200 Jahren gefunden hat. ♦