



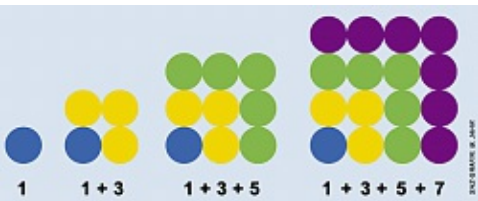
Ein Bild sagt mehr als tausend Worte

VON BJÖRN UND SÖREN CHRISTENSEN

Mathematik lebt von Beweisen. Man muss sich nicht auf Experimente oder Beobachtungen verlassen, um eine Theorie zu untermauern. Stattdessen gilt: Wenn ein Beweis einmal korrekt erbracht ist, dann gilt er für die Ewigkeit. Dies ist doch ein Privileg, von dem man in anderen Wissenschaften nur träumen kann.

Trotzdem sind Beweise bei unseren Studierenden, die nicht aus der Mathematik kommen, nicht immer sonderlich beliebt. Dies hat auch damit zu tun, dass oft Begriffsbildungen benötigt werden, die den meisten Menschen aus dem täglichen Leben nicht vertraut sind. Manchmal lassen sich aber die wesentlichen Argumente auch so in Form eines Bildes darstellen, dass sich alle weiteren Worte fast erübrigen.

EIN SOLCHES BEISPIEL möchten wir heute aufzeigen. Es geht um die Frage, was beim Zusammenzählen der ersten ungeraden Zahlen herauskommt. Man möchte also Summen der Form $1+3+5+7+\dots$ möglichst elegant berechnen. Dazu wählen wir die untere Darstellung. Wir starten mit einem Stein. Darum herum legen wir einen „Winkelhaken“ aus drei Steinen, das heißt, der erste Stein liegt exakt über dem Ursprungsstein, der zweite im 45-Grad-Winkel in Nordost schräg darüber, der dritte Stein exakt rechts neben dem Ursprungsstein, siehe Abbildung.



Darum herum lässt sich nun ein Winkelhaken aus fünf Steinen legen usw.

In jedem Schritt entsteht ein Quadrat, dessen Seitenlänge gerade der Anzahl der zusammenzu-

zählenden ungeraden Zahlen bis zu dieser maximalen Zahl entspricht. Die Summe der ungeraden Zahlen bis zu dieser Zahl ist also die Summe aller so ausgelegten Steine. Da es sich um ein Quadrat handelt, entspricht dies der Seitenlänge zum Quadrat. Dadurch wird klar: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ergibt gerade n im Quadrat. Die ersten – sagen wir – 100 ungeraden Zahlen ergeben also zusammen gerade $100 \times 100 = 10.000$, und dies ganz ohne aufwendiges Rechnen. Mit dieser schönen Veranschaulichung lassen sich auch gleich weitere Erkenntnisse gewinnen. So fiel schon dem italienischen Universalgenie Galileo Galilei folgendes auf den ersten Blick überraschende Phänomen auf: Wenn man eine lange Liste ungerader Zahlen zusammenzählt, erhält man nach der Hälfte der Summanden gerade ein Viertel der Gesamtsumme. (Diese Behauptung ergibt natürlich nur bei einer geraden Anzahl von Zahlen Sinn.) Und tatsächlich lässt sich auch dies direkt aus dem Bild ablesen: Die erste Hälfte der Zahlen bildet gerade das linke untere Viertel des Quadrats. Manchmal sagt also ein einziges Bild tatsächlich mehr als tausend Worte.



Björn Christensen (links) ist Professor für Statistik und Mathematik an der FH Kiel. **Sören Christensen** ist Professor für Stochastik an der Christian-Albrechts-Universität Kiel. Für unsere Leser holen die Brüder Mathematik in den Alltag.

