



ACHTUNG, MATHE!

Münzwürfe und Primzahlen

VON BJÖRN UND SÖREN CHRISTENSEN

Manchmal sind auch einfache statistische Rätsel Inspirationsquellen für Fortschritte in ganz anderen Gebieten der Mathematik. Einen solchen Fall möchten wir heute vorstellen und werden dann in der kommenden Woche den Zusammenhang zu Primzahlen erläutern. Aber der Reihe nach: Anna und Bernd haben je eine Euromünze, die sie jeweils mehrmals nacheinander werfen. Anna wirft so lange, bis zum ersten Mal der „Adler“ zweimal direkt hintereinander oben liegt. Wenn wir kurz „A“ für Adler und „Z“ für Zahl schreiben, dann hört sie also auf, sobald AA erscheint. Ein paar Beispielwurffolgen sind also: AA, ZAA, aber manchmal kann es auch deutlich mehr Würfe erfordern, so etwa bei ZAZZZAZAA. Bernd spielt ein ganz ähnliches Spiel: Er wartet, bis der Adler gefolgt von Zahl erscheint, also AZ (in dieser Reihenfolge). Die Frage ist nun, wer von beiden im Mittel länger warten muss. Was meinen Sie?

Die meisten Menschen tippen spontan darauf, dass beide gleich lang werfen müssen – schließlich ist die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen der beiden Kombinationen jeweils $1/4$ (der erste Münzwurf tritt mit $1/2$ ein, genauso wie der zweite). Die Sache ist aber etwas komplizierter. Die Wahrscheinlichkeit, dass Anna oder Bernd nach zwei Würfen schon aufhören können, ist zwar noch gleich. Schauen wir aber einmal, was bei drei Würfungen geschieht. Dabei können acht mögliche Wurffolgen auftreten:

- AAA Anna hört nach zwei Würfungen auf
- AAZ Anna hört nach zwei Würfungen auf, Bernd nach 3 Würfungen
- AZA Bernd hört nach zwei Würfungen auf
- AZZ Bernd hört nach zwei Würfungen auf
- ZAA Anna hört nach drei Würfungen auf
- ZAZ Bernd hört nach drei Würfungen auf
- ZZA keiner hört auf
- ZZZ keiner hört auf

Wie schon erwartet, ist die Wahrscheinlichkeit, bereits nach zwei Würfungen erfolgreich zu sein, für Anna und Bernd gleich, nämlich $2/8=1/4$. Genau drei Würfe zu benötigen, tritt für Anna aber nur in 1 von 8 Fällen auf, bei Bernd aber in 2 von 8. Bernd hat also eine höhere Wahrscheinlichkeit, dass seine Kombination zuerst erscheint. Insgesamt kann man ausrechnen, dass Anna im Mittel sechs Würfe benötigt, während Bernd mit vier auskommt, damit zum ersten Mal ihre Münzkombinationen geworfen werden. (Das ist allerdings schwieriger; mit einigem Nachdenken können Sie sich das aber vielleicht selbst herleiten).

Diese kleine Aufgabe wurde in einem Kurs an der amerikanischen Stanford-Universität behandelt, den auch der Zahlentheoretiker Kannan Soundararajan besuchte. Sie inspirierte ihn dann aber zu einer neuen Erkenntnis über Primzahlen, die wir in der kommenden Woche an dieser Stelle vorstellen werden.



FOTOLIA