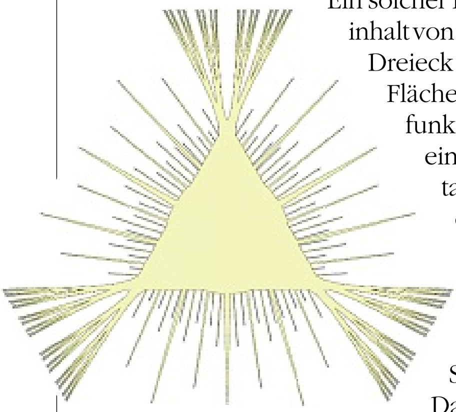
Nadeln drehen

VON BJÖRN & SÖREN CHRISTENSEN

Manche mathematischen Probleme sind eher abstrakt. Hier kommt eines, über das Sie selbst am Frühstückstisch nachdenken können: das sogenannte Kakeya-Nadelproblem, benannt nach dem japanischen Mathematiker Soichi Kakeya (1886-1947). Er fragte sich, wie klein eine Fläche sein kann, in der man eine Nadel (der Länge 1) so bewegen kann, dass sie dabei um 180 Grad gedreht wird, ohne dabei aus der Fläche herauszukommen.

HOLEN SIE SICH RUHIG SELBST EINE NADEL, um die Herausforderung auszuprobieren. Eine erste Fläche fällt Ihnen bestimmt sofort ein: ein Kreis mit Durchmesser 1. In diesem kann man die Nadel ja einfach um ihren Mittelpunkt drehen. Ein solcher Kreis hat bekanntlich einen Flächeninhalt von /4=0,785… . Aber auch ein gleichseitiges Dreieck der Höhe 1 – dies hat übrigens den Flächeninhalt 1 : (Wurzel aus 3) = 0,577… – funktioniert: Wenn dort der Nadelkopf in einer der Ecken liegt, lässt sich die Nadel tatsächlich so drehen und verschieben, dass die Nadel anschließend mit der Spitze in einer der anderen Ecken ist und sich anschließend entsprechend weiterdrehen lässt. Dieses Prinzip klappt sogar noch, wenn man die Seiten des Dreiecks etwas „einbeult". Dann entsteht ein sogenanntes Deltoid mit einem Flächeninhalt von /8=0,392… . Fällt Ihnen noch etwas Besseres ein? – Wenn ja, dann können Sie stolz auf sich sein. Denn Soichi Kakeya gelang dies nicht und er vermutete, dass man keine Fläche mit einem kleineren Flächeninhalt finden kann, in dem sich die Nadel drehen lässt.



WIKIPEDIA

In der Mathematik reicht es aber nicht, dass einem nichts Besseres einfällt, sondern man benötigt einen Beweis dafür, was Kakeya für seine Vermutung allerdings nicht gelang. Und dies war auch erklärlich, denn einige Jahre später wurden Beispiele mit kleinerem Flächeninhalt präsentiert. Diese waren aber deutlich komplizierter als die zuvor vorgeschlagenen Flächen. Ein solches Beispiel sehen Sie unten. Die Fläche enthält viele kleine Zacken, in denen die Nadel sich bewegen lässt, was allerdings sehr aufwändig ist.

ABER WIE KLEIN GEHT ES DENN JETZT? – Die erstaunliche Antwort lautet: beliebig klein, zumindest wenn wir annehmen, dass die Nadel selbst beliebig dünn ist. Nennen Sie dann irgendeinen noch so kleinen Flächeninhalt und man kann dazu eine Fläche konstruieren, in der sich diese Nadel mit vielen Bewegungen in eine umgekehrte Stellung bringen lässt. Dieser Beweis gelang Mathematikern in den 1970er Jahren. Nützlich ist diese Erkenntnis erst einmal nicht, aber schön und überraschend wohl doch. ●

Björn Christensen (links) ist Professor für Statistik und Mathematik an der FH Kiel. **Sören Christensen** ist Professor für Stochastik an der Christian-Albrechts-Universität Kiel. Für unsere Leser holen die Brüder Mathematik in den Alltag.