Achtung, Mathe!

Ein Spiel mit einer versteckten Symmetrie

Björn und Sören Christensen

Alex und Berit probieren ein Spiel aus: Alex hat zwei Münzen, Berit hat drei. Beide werfen jeweils alle ihre Münzen gleichzeitig. Bei wem häufiger „Adler" oben liegt, gewinnt. Bei Gleichstand gewinnt Alex. Wie sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten? – Versuchen Sie es gern einmal selbst, die Lösung zu finden!

Im ersten Moment scheint die Lösung etwas aufwendig, zumindest wenn man einfach alle Fälle durchgeht und die Wahrscheinlichkeiten zusammenrechnet. Fangen wir damit einmal an: Alex gewinnt, wenn einer der folgenden Fälle eintritt:

- Er wirft zweimal „Adler" und Berit gar nicht. Die Wahrscheinlichkeiten dafür ist $(1/2)^2$ x $(1/2)^3$ = 1/4 x 1/8 = 1/32.
- Er wirft zweimal „Adler" und Berit einmal. Die Wahrscheinlichkeiten dafür ist $(1/2)^2$ x 3 x $(1/2)^3$ = 3/32 (da es bei Berit drei Münzen und damit drei Möglichkeiten gibt, die Adler zeigen könnten).
- ...

Wenn man es tatsächlich schafft, all diese Fälle richtig auszurechnen, dann ist zumindest das Ergebnis einfach: Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist für beide Spieler 1/2; das Spiel ist also fair.

Das ist auch kein Zufall. Sie können die Aufgabe nämlich auch ganz ohne komplizierte Rechnungen lösen, wenn Sie eine gute Idee haben, das Problem zu vereinfachen. Und diese Idee besteht einfach darin, das Spiel umzuformulieren: Wir stellen uns vor, dass auch Berit zunächst nur zwei Münzen wirft. Hat Alex mehr „Adler", kann Berit auch durch das Werfen der Dritten Münze nicht mehr gewinnen, denn bei Gleichstand soll er ja gewinnen. Hat Berit mehr „Adler", hat sie immer gewonnen, egal, was die dritte Münze erbringt. Nur bei Gleichstand ist es nicht klar, wie das Spiel ausgeht, und so wirft sie ihre dritte Münze. Diese entscheidet dann, wer gewinnt.

Dieses Spiel ist symmetrisch, die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt für beide vor dem dritten Münzwurf 50 Prozent, und nach dem dritten Münzwurf ebenfalls 50 Prozent. Tatsächlich liefert diese Modifikation also immer die gleichen Gewinner wie das ursprüngliche Spiel.

Mit ein wenig Nachdenken kommt man also ganz ohne Rechnen zur Antwort der Frage, wie sich die Gewinnwahrscheinlichkeiten verhalten. Und das Beispiel zeigt, dass in der Mathematik häufig nicht nur ein Lösungsweg vorhanden ist, sondern „geschickte Lösungswege" lange Rechnungen ersparen.

Björn Christensen ist Professor für Statistik und Mathematik an der FH Kiel. **Sören Christensen** ist Professor für Stochastik an der Christian-Albrechts-Universität Kiel.

SH Journal, Wochenendbeilage im shz, 07.01.2023